関数の積の評価について (調和解析学と非線形偏微分方程式)

AUTHOR(S):

宮地, 晶彦

CITATION:

宮地, 晶彦. 関数の積の評価について (調和解析学と非線形偏微分方程式). 数理解析研究所講究録 1998, 1059: 40-50

ISSUE DATE:

1998-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/62346

数理解析研究所講究録
1059巻 1998年 40-50

関数の積の評価について

宮地 晶彦　MIYACHI, AKIHIKO（東京女子大学 文理学部）

Euclid 空間上の関数の各点毎の積に関連した双線型または多重線型作用素の適当な関数空間での有界性について，2つの結果を報告する．

最大関数を用いて定義される ALGEBRA

Sobolev 空間が関数の各点毎の積に関して algebra になる場合はよく調べられている．例えば，Ω が $\mathbb{R}^n$ の有界領域で Lipschitz 境界を持つ場合に，Ω 上の L^p 関数 $(1 \leqq p < \infty)$ で distribution の意味の k 階までの導関数がすべて L^p に属すものの全体を $W_p^k(\Omega)$ とし，これに通常のノルムをいれると，$W_p^k(\Omega)$ が関数の各点毎の積に関して algebra になるのは，$1 < p < \infty$ かつ $k > n/p$, または $p = 1$ かつ $k \geqq n$ の場合で，$1 < p < \infty$ かつ $k \leqq n/p$ のときには algebra にならない．(例えば，Adams [1; Chapt. V] 参照.)

Sobolev 空間 $W_p^k(\Omega)$ の $1 < p < \infty$ の場合には critical の $k = n/p$ のときは algebra にならないのだが，$0 < p \leqq 1$ の場合に，L^p のかわりに Hardy 空間 H^p を用いて Sobolev 空間と同様に関数空間を定義すると，$k = n/p$ のときにも各点毎の積に関して algebra になる関数空間が得られることが知られている（Dhalberg [11], J. Marschall [16], Strichartz [23], 宮地 [21] 等）．

今回，報告したいのは，$1 < p < \infty$ で $k = n/p$ のときに，L^p のかわりに Lorentz 空間 $L^{(p,r)}$ $(0 < r \leqq 1)$ を用いれば algebra が得られること，また同様の結果が Hardy-Lorentz 空間を用いて $0 < p \leqq 1$ の場合にも成り立つこと，である．或る最大関数（maximal function）を使って，k が整数でない場合も含めて Sobolev 空間の一般化にあたる関数空間を定義して，このことを示そう．

以下では，基礎領域 Ω は $\mathbb{R}^n$ 全体とする．関数の延長の議論をすることによって Ω が $\mathbb{R}^n$ の部分領域の場合も扱うことができるが，ここでは述べない．

Lorentz 空間の定義から始めよう.

$\mathbb{R}^n$ の可測（= Lebesgue 可測）部分集合 $E \subset$ の Lebesgue 測度を $|E|$ で表す. $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f に対して，f の分布関数 λ_f を

$$\lambda_f(s) = |\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > s\}| \qquad (0 < s < \infty)$$

で定義する. $\mathbb{R}$ の区間 $(0, \infty)$ 上の非負実数値（∞ も値に含める）の単調非増大かつ右連続な関数 f^* で，すべての $0 < s < \infty$ に対して

$$|\{t \in (0, \infty) \mid f^*(t) > s\}| = \lambda_f(s)$$

をみたすものが唯一つ存在する. f^* を f の再配列（rearrangement）という.

$0 < p < \infty, 0 < \sigma \leqq \infty$ に対して，

$$\|f\|_{L^{(p,\sigma)}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^\sigma t^{-1} dt\right)^{1/\sigma}$$

と定義する. 分布関数を用いると，

$$\|f\|_{L^{(p,\sigma)}} = \left(p \int_0^\infty (\lambda_f(s)^{1/p} s)^\sigma s^{-1} ds\right)^{1/\sigma}$$

と書ける. ただし，$\sigma = \infty$ のときは上記の積分は，それぞれ，

$$\sup\{t^{1/p} f^*(t) \mid 0 < t < \infty\} \quad \text{または} \quad \sup\{\lambda_f(s)^{1/p} s \mid 0 < s < \infty\}$$

でおきかえる.

Lorentz 空間 $L^{(p,\sigma)}$ とは $\|f\|_{L^{(p,\sigma)}} < \infty$ なる f の全体のことである.

Lorentz 空間の簡単な性質を述べておく.

(a) $L^{(p,p)} = L^p$, $\|f\|_{L^{(p,p)}} = \|f\|_{L^p}$.

(b) $p \neq \sigma$ のときは，“$\|f\|_{L^{(p,\sigma)}} < \infty \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty$” をみたす単調増大関数 Φ は存在しない. 従って上記 (a) の場合を除いては $L^{(p,\sigma)}$ は Orlicz 空間ではない.

(c) 変数の相似変換 $x \mapsto ax$ $(a > 0)$ に対して $\|f\|_{L^{(p,\sigma)}}$ は L^p ノルムと同じ斉次性をもつ，すなわち，

$$\|f(a\,\cdot)\|_{L^{(p,\sigma)}} = a^{-n/p} \|f\|_{L^{(p,\sigma)}}.$$

(d) $p > q$ ならば $L^{(p,\sigma)} \subset L^q_{\mathrm{loc}}$.

次にフラット最大関数を定義する.

正の実数 α に対して, α より真に小さい最大の整数を (α) で表す, すなわち (α) は整数で $(\alpha) < \alpha \leqq (\alpha)$ である. $Q = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n \mid \max|x_i - a_i| \leqq t\}$ の形の $\mathbb{R}^n$ の部分集合を立方体と呼ぶ.

f を $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数とする. 立方体 Q と非負整数 k と $0 < r \leqq \infty$ とに対して

$$v_r^k(f, Q) = \inf\{|Q|^{-1/r}\|f - P\|_{L^r(Q)} \mid P \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上の次数} \leqq k \text{ の多項式}\}$$

($\|\cdot\|_{L^r(Q)}$ は Lebesgue 測度に関する Q 上の L^r ノルム) とし, f のフラット最大関数 $f^\flat_{\alpha,r}$ $(0 < \alpha < \infty, 0 < r \leqq \infty)$ を

$$f^\flat_{\alpha,r}(x) = \sup\{|Q|^{-\alpha/n} v_r^{(\alpha)}(f, Q) \mid Q: \text{立方体}, Q \ni x\} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する.

フラット最大関数を用いて Lipschitz クラスの関数を特徴づける次の命題は, 古くから知られている (Campanato [3], [4], N. G. Meyers [17]):

命題1. $0 < \alpha < \infty$ かつ $0 < r \leqq \infty$ のとき, $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f に対して, $f^\flat_{\alpha,r} \in L^\infty$ が成り立つための必要十分条件は, 零集合の上で f の値を変更すると f が $C^{(\alpha)}$ 級の関数になりかつ

$$|f|_{\mathrm{Lip}\,\alpha} = \sum_{|\nu|=(\alpha)} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\nu f(x) - \partial^\nu f(y)|}{|x - y|^{\alpha - (\alpha)}} < \infty$$

となることである. 更に, そのような f に対して

$$\|f^\flat_{\alpha,r}\|_{L^\infty} \approx |f|_{\mathrm{Lip}\,\alpha}.$$

この命題の条件をみたす関数を $\mathrm{Lip}\,\alpha$ クラスの関数ということにする.

擬ノルム $|f|_{C^\alpha_{p,\sigma}}$ を定義しよう. f を $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数, $0 < p, \alpha < \infty$, $0 < \sigma \leqq \infty$ とするとき, $0 < r \leqq \infty$ かつ

$$\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{n} > \frac{1}{p} \tag{1}$$

なる r を一つとって

$$|f|_{C^\alpha_{p,\sigma}} = \|f^\flat_{\alpha,r}\|_{L^{(p,\sigma)}}$$

と定義する.

擬ノルム $|f|_{C^{\alpha}_{p,\sigma}}$ は次のような性質を持つ.

(e) r を (1) の範囲で取り換えても同値な大きさの $|f|_{C^{\alpha}_{p,\sigma}}$ が得られる (DeVore-Sharpley [10; Theorem 4.3] 参照).

(f) $|f|_{C^{\alpha}_{p,\sigma}} = 0 \Longleftrightarrow f$ が次数 $\leqq (\alpha)$ の多項式.

(g) $a > 0$, $u \in \mathbb{R}^n$ のとき, $|f(a\cdot+u)|_{C^{\alpha}_{p,\sigma}} = a^{\alpha-n/p}|f|_{C^{\alpha}_{p,\sigma}}$.

擬ノルム $|f|_{C^{\alpha}_{p,\sigma}}$ は Sobolev 空間のセミノルム

$$\sum_{|\nu|=k} \|\partial^{\nu} f\|_{L^p}$$

の一般化になっている. このことを $p \leqq 1$ の場合も含めて言うために Hardy-Lorentz 空間を導入しよう.

$\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト台の C^{∞} 級関数 φ で $\int \varphi(x)dx \neq 0$ なるものを一つとり, $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(t^{-1}x)$ $(t > 0)$ と書く. $\mathbb{R}^n$ 上の distribution f に対して, 最大関数 f^+ を

$$f^+(x) = \sup\{|(f * \varphi_t)(x)| \mid 0 < t < \infty\} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する. $0 < p < \infty$, $0 < \sigma \leqq \infty$ に対して,

$$\|f\|_{H^{(p,\sigma)}} = \|f^+\|_{L^{(p,\sigma)}}$$

と定義し, これが有限になる distribution f の全体を $H^{(p,\sigma)}$ と定義する.

(h) $\|f\|_{H^{(p,\sigma)}}$ は φ を取り換えても同値な大きさのものになり, $H^{(p,\sigma)}$ は φ の取り方に依らない. このことは通常の Hardy 空間の場合 (下の (i)) と同様に証明できる.

(i) $H^{(p,p)} = H^p$ ($=$ Hardy 空間).

(j) $1 < p < \infty$ のときは $H^{(p,\sigma)} = L^{(p,\sigma)}$ で $\|f\|_{H^{(p,\sigma)}} \approx \|f\|_{L^{(p,\sigma)}}$.

擬ノルム $|f|_{C^{\alpha}_{p,\sigma}}$ が Sobolev 空間のセミノルムの一般化になっていることは, 次の命題2の通りである.

命題2. $0 < p < \infty$, $0 < \sigma \leqq \infty$ で k が $k + n > n/p$ なる正の整数のとき, 次の2つの条件 (ア) と (イ) は互いに同値である; 詳しく言うと, f が2つの条件のうちいずれか一方をみたせば, f は $\mathbb{R}^n$ 上の局所可積分関数となりもう一方の条件をもみたす:

(ア) f は $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数で $|f|_{C^{k}_{p,\sigma}} < \infty$;

(イ) f は $\mathbb{R}^n$ 上の distribution で $|\nu| = k$ なるすべての多重指数 ν について $\partial^\nu f \in H^{(p,\sigma)}$.

しかも，この条件をみたす f について，

$$|f|_{C^k_{p,\sigma}} \approx \sum_{|\nu|=k} \|\partial^\nu f\|_{H^{(p,\sigma)}}.$$

この命題は，$p = \sigma > 1$ の場合は A. P. Calderón [2; Theorem 4 と Lemma 7]（Christ [6; Lemma 2.2], DeVore-Sharpley [10; Theorem 6.2] も参照），$p = \sigma \leqq 1$ の場合は Durán [12], 宮地 [20] による．$p \neq \sigma$ の場合も同様に証明できる．

さて，$0 < \alpha < \infty$, $0 < \sigma \leqq 1$, $\alpha = n/p$ の場合に $|f|_{C^\alpha_{p,\sigma}}$ を使って algebra が定義されるのだが，その前に，この擬ノルムが (α) 次以下の多項式を mod とした擬ノルムでしかない不便（上記 (f)）を片づけて置く必要がある．

$\mathbb{R}^n$ 上の連続関数 f で $|x| \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ となる f 全体を C_0 で表す．C_0 に属す関数とほとんどいたるところで一致する関数も C_0 に属すとみなす．

命題３．$0 < \alpha < \infty, 0 < \sigma \leqq 1$ のとき, $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f が $|f|_{C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}} < \infty$ をみたすならば，次数 (α) 以下の $\mathbb{R}^n$ 上の多項式 π_f で $f - \pi_f \in C_0$ をみたすものが唯一つ存在し，

$$\|f - \pi_f\|_\infty \leqq c|f|_{C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}}$$

が成り立つ．

そこで，$0 < \alpha < \infty$, $0 < \sigma \leqq 1$ に対して，関数空間 $C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}$ を次のように定義する：

$$C^\alpha_{n/\alpha,\sigma} = \{f \in C_0 \mid |f|_{C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}} < \infty\}.$$

命題３により，$C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}$ は，$|f|_{C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}} < \infty$ をみたす $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f のうち，$\pi_f = 0$ なるものの全体である．$\pi_f = 0$ になりさえすればよいのであるから，$\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f が $C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}$ に属するための条件は，例えば，$|f|_{C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}} < \infty$ かつすべての $s > 0$ に対して $\lambda_f(s) < \infty$ であること，ということもできる．

$|f|_{C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}}$ を $C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}$ における擬ノルムと定義する．これは $C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}$ においては mod 0 の擬ノルムである，すなわち，$f \in C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}$ かつ $|f|_{C^\alpha_{n/\alpha,\sigma}} = 0$ となるのは $f = 0$ のときに限る．

次が目的の定理である.

定理1．$0<\alpha<\infty$ かつ $0<\sigma\leqq 1$ のとき，$C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}$ は関数の各点毎の積に関して algebra になる，すなわち，α, σ と次元 n のみに依存する定数 c があって，すべての $f, g\in C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}$ に対して

$$|fg|_{C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}}\leqq c|f|_{C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}}|g|_{C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}}$$

が成り立つ.

前に述べた Strichartz らの結果は上の定理の $\sigma=n/\alpha\leqq 1$ の場合に相当する.

定理1の証明について少し述べておく．証明には次の命題に述べるアトム分解を用いる.

命題4．$0<\alpha<\infty$ かつ $0<\sigma\leqq 1$ とする.

(I) $\{\varphi_j\}$ が $\mathrm{Lip}\,\alpha$ クラスの関数の列, $\{Q_j\}$ が $\mathbb{R}^n$ の立方体の列，$\{\lambda_j\}$ が非負実数の列で,

$$\text{(2)}\qquad \operatorname{supp}\varphi_j\subset Q_j,\quad |\varphi_j|_{\mathrm{Lip}\,\alpha}\leqq\lambda_j,\quad \sum_j\lambda_j\chi_{Q_j}\in L^{(n/\alpha,\sigma)}$$

ならば，級数 $\sum_j\varphi_j$ は C_0 で無条件収束し,

$$\left|\sum_j\varphi_j\right|_{C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}}\leqq c\left\|\sum_j\lambda_j\chi_{Q_j}\right\|_{L^{(n/\alpha,\sigma)}}$$

かつ

$$\left\|\sum_j\varphi_j\right\|_{L^\infty}\leqq c\left\|\sum_j\lambda_j\chi_{Q_j}\right\|_{L^{(n/\alpha,\sigma)}}.$$

(II) 逆に，f が $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数で $|f|_{C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}}<\infty$ をみたせば，(2) をみたす列 $\{\varphi_j\}$, $\{Q_j\}$, $\{\lambda_j\}$ が存在して,

$$f=\pi_f+\sum_j\varphi_j$$

かつ

$$\left\| \sum_j \lambda_j \chi_{Q_j} \right\|_{L^{(n/\alpha,\sigma)}} \leqq c|f|_{C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}}$$

と書ける.

この命題のように $|\cdot|_{C^{\alpha}_{n/\alpha,\sigma}}$ が $|\cdot|_{\mathrm{Lip}\,\alpha}$ と関連が付くのは命題1の事実があるからである. 命題3の証明は [22] にある関数空間 C^{α}_{p} のアトム分解と同様の方法でできる.

命題3の φ_j のようなコンパクト台の $\mathrm{Lip}\,\alpha$ クラスの関数同士の積はまた同様の関数であるから, 命題3を使って定理1を示すのは容易である ([21] 参照).

特異積分の積の H^p 評価

ここで H^p というのは, $\mathbb{R}^n$ 上の実関数論的な Hardy 空間のことである. すなわち, 前節の Hardy-Lorentz 空間の記号で $H^p = H^{(p,p)}$ $(0 < p < \infty)$ である.

以下の目的は, Coifman らが扱った特異積分の積の形の双線型または多重線型作用素の H^p 評価を, 分数階積分作用素を含む形にまで一般化し, 同時に結果を改良することである.

$0 \leqq \lambda < \infty$ に対して, $G(\lambda)$ を

$$G(\lambda) = \{m \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \mid |\partial^{\alpha} m(\xi)| \leqq c_{\alpha}|\xi|^{-\lambda-|\alpha|} \quad (\forall \alpha)\}$$

と定義する.

Schwartz クラス $\mathcal{S}$ の関数 f のうち Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi)$ が $\xi = 0$ のある近傍で 0 となる f の全体を $\mathcal{S}_0$ と書く.

$m \in G(\lambda)$ $(0 \leqq \lambda < \infty)$ に対して, 作用素 T_m を

$$T_m : \mathcal{S}_0 \ni f \longmapsto (m\widehat{f})^{\vee} \in \mathcal{S}_0$$

で定義する ($^{\vee}$ は Fourier 逆変換を表す). $m \in G(\lambda)$ に対する作用素 T_m 全体の集合を $\mathcal{K}(\lambda)$ と書く.

$\mathcal{A}$ を有限添字集合, k を 2 以上の整数とし, 各 $\sigma \in \mathcal{A}$ と $j = 1, 2, \cdots, k$ とに対して, $0 \leqq \lambda^{\sigma}_{j} < \infty$ と $T^{\sigma}_{j} \in \mathcal{K}(\lambda^{\sigma}_{j})$ が与えられているものとする.

$$(\mathcal{S}_0)^k \ni (f_1, \cdots, f_k) \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} (T^{\sigma}_{1} f_1) \cdots (T^{\sigma}_{k} f_k) \in \mathcal{S}$$

という多重線型写像を考える. この多重線型写像を簡単に Λ^k と書くことにする.

次の仮定が成り立っている場合を考える：

(3) $$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^\sigma = \lambda \text{ が } \sigma \text{ に依らない.}$$

$p_1, \cdots, p_k$ と q は,

(4) $$\infty > \frac{1}{p_j} > \frac{\lambda_j^\sigma}{n} \quad (\forall \sigma \in \mathcal{A},\ \forall j),$$

(5) $$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{\lambda_j^\sigma}{n} \right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j} - \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{q}$$

をみたすものとする.

よく知られているように，$m \in G(\lambda)$ に対する T_m は，$0 < p \leqq q < \infty$ かつ $1/p - 1/q = \lambda/n$ のとき H^p から H^q への有界線型作用素に拡張できる．$1/q_j^\sigma = 1/p_j - \lambda_j^\sigma/n$ と書くと，T_j^σ は $H^{p_j} \to H^{q_j^\sigma}$ 有界であるから，Hölder 不等式により，

(6) $$\begin{aligned} \|\Lambda^k(f_1, \cdots, f_k)\|_{L^q} &\leqq c \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \|T_1^\sigma f_1\|_{L^{q_1^\sigma}} \cdots \|T_k^\sigma f_k\|_{L^{q_k^\sigma}} \\ &\leqq c \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \|T_1^\sigma f_1\|_{H^{q_1^\sigma}} \cdots \|T_k^\sigma f_k\|_{H^{q_k^\sigma}} \leqq c \|f_1\|_{H^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{H^{p_k}} \end{aligned}$$

という評価が成り立つことは明らかである．ところが，$q \leqq 1$ のとき，モーメントに関する簡単な条件の下で，上の評価の L^q が H^q に置き換えられるのである．

一般に，関数 $f \in \mathcal{S}$ と非負整数 m について，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) x^\nu dx = 0 \quad \text{for} \quad |\nu| \leqq m$$

が成り立つとき，f は m 次までのモーメントが消えるということにする．

$0 < q \leqq 1$ のときは，$\mathcal{S} \subset H^q$ は成り立たず，$f \in \mathcal{S}$ が H^q に属すための必要十分条件は f の $[n/q - n]$ 次までのモーメントが消えることである．従って，評価 (6) の L^q が H^q で置き換えられるためには，$\Lambda^k(f_1, \cdots, f_k)$ の $[n/q - n]$ 次までのモーメントが消えることが必要である．

次の定理は，この必要条件の下で，評価 (6) の L^q が H^q に替えられることを主張する．

定理2．$k=2$ とし，Λ^2 を上記の双線型写像とする．λ_j^σ, p_j $(j=1,2)$ と $q \leqq 1$ が仮定 (3), (4), (5) をみたし，すべての $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_0$ に対して $\Lambda^2(f_1, f_2)$ の $[n/q-n]$ 次までのモーメントが消えると仮定する．このとき，すべての $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_0$ に対して

$$\left\|\Lambda^2(f_1, f_2)\right\|_{H^q} \leqq c\|f_1\|_{H^{p_1}}\|f_2\|_{H^{p_2}}$$

が成り立つ．

この定理を $k \geqq 3$ の場合へ一般化するために，作用素を斉次のものに制限する．ただし，$T_m \in \mathcal{K}(\lambda)$, $0 \leqq \lambda < \infty$, のとき，T_m が斉次の作用素というのは，multiplier m が斉次関数であること，すなわち，

$$m(t\xi) = t^{-\lambda}m(\xi) \quad (\forall t > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

が成り立つことである．

定理3．$k \geqq 3$ とし，Λ^k を前記の多重線型写像とする．λ_j^σ, p_j $(j = 1, \cdots, k)$ と $q \leqq 1$ が仮定 (3), (4), (5) をみたし，すべての $f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{S}_0$ に対して $\Lambda^k(f_1, \cdots, f_k)$ の $[n/q-n]$ 次までのモーメントが消えると仮定する．更に，Λ^k の中の T_j^σ がすべて斉次の作用素であるとする．このとき，すべての $f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{S}_0$ に対して

$$\left\|\Lambda^k(f_1, \cdots, f_k)\right\|_{H^q} \leqq c\|f_1\|_{H^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{H^{p_k}}$$

が成り立つ．

次元 $n=1$ のとき，$\mathbb{R}$ 上の Hilbert 変換を $\tilde{f}$ で表すと，

$$\Lambda^2(f, g) = f\tilde{g} + \tilde{f}g,$$

$$\Lambda^2(f, g) = fg - \tilde{f}\tilde{g}$$

は，$f, g \in \mathcal{S}_0$ のときすべての次数のモーメントが消え，定理2の条件をみたす最も簡単な例である．この2つの Λ^2 については，実関数論的な $H^p = H^p(\mathbb{R})$ が一変数正則関数の古典的な Hardy 空間と対応がつくことから，一変数正則関数の性質を使って容易に定理2の結論の不等式を示すことができる．一般の次元の場合は，初め，Coifman-Rochberg-Weiss [9] によって，定理2の $\lambda_j^\sigma = 0$ かつ $q=1$ の場合が特殊な Λ^2 について証明され，その後，内山明人 [24], [25], Chanillo [5]，小森康雄 [14], [15]，宮地 [18], [19], Coifman-Grafakos [7], Grafakos [13] らによって次第に一般化された．定理2の λ_j^σ の大きい場合や定理3は，筆者の知る限り，これらの既知の結果よりもよくなっている．

定理2, 3の不等式の偏微分方程式への様々の応用については，Coifman-Lions-Meyer-Semmes [8] に詳しい．

References

1. R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Pure and Appl. Math. Vol. 65, Academic Press, New York, 1975.
2. A. P. Calderón, *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions*, Studia Math. **44** (1972), 563–582.
3. S. Campanato, *Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 175–188.
4. ———, *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **18** (1964), 137–160.
5. S. Chanillo, *A note on commutators*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 7–16.
6. M. Christ, *The extension problem for certain function spaces involving fractional orders of differentiability*, Ark. Mat. **22** (1984), 63–81.
7. R. R. Coifman and L. Grafakos, *Hardy space estimates for multilinear operators, I*, Revista Mat. Iberoamericana **8** (1992), 45–67.
8. R. Coifman, P. L. Lions, Y. Meyer, and S. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl. **72** (1993), 247–286.
9. R. R. Coifman, R. Rochberg, and G. Weiss, *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann. of Math. **103** (1976), 611–635.
10. R. A. DeVore and R. C. Sharpley, *Maximal Functions Measuring Smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 47, No. 293, 1984.
11. B. E. J. Dhalberg, *An algebra of functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), 39–43.
12. R. G. Durán, *Parabolic maximal functions and potentials of distributions in H^p*, J. Math. Anal. Appl. **100** (1984), 130–154.
13. L. Grafakos, *Hardy space estimates for multilinear operators, II*, Revista Mat. Iberoamericana **8** (1992), 69–92.
14. Y. Komori, *The factorization of H^p and the commutators*, Tokyo J. Math. **6** (1983), 435–445.
15. ———, *Multilinear singular integral の H^p 評価*, 実解析セミナー 1994, 岡山県立大での研究集会の報告集, pp. 58–59.
16. J. Marschall, *Some remarks on Triebel spaces*, Studia Math. **87** (1987), 79–92.
17. N. G. Meyers, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 717–721.
18. A. Miyachi, *Products of distributions in H^p spaces*, Tôhoku Math. J. **35** (1983), 483–498.
19. ———, *A factorization theorem for the real Hardy spaces*, Proc. Analysis Conference, Singapore 1986, Choy-Jesudason-Lee eds., North-Holland, 1988, pp. 167–175.
20. ———, *Hardy-Sobolev spaces and maximal functions*, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 73–90.
21. ———, *Multiplication and factorization of functions in Sobolev spaces and in C_p^α spaces on general domains*, Math. Nachr. **176** (1995), 209–242.
22. ———, *Atomic decomposition for Sobolev spaces and for the C_p^α spaces on general domains*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 59–96.

23. R. S. Strichartz, *H^p Sobolev spaces*, Colloq. Math. **60/61** (1990), 129–139.
24. A. Uchiyama, *On the compactness of operators of Hankel type*, Tôhoku Math. J. **30** (1978), 163–171.
25. ———, *The factorization of H^p on the space of homogeneous type*, Pacific. J. Math. **92** (1981), 453–468.